МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямами підготовки 6.030601 – „Менеджмент”, 6.140101 – “Готельно-ресторанна справа”, 6.020107 – „Туризм”)

Харків – ХНАМГ – 2011

Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики (для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямами підготовки 6.030601 – „Менеджмент”, 6.140101 – “ Готельно-ресторанна справа”, 6.020107 – „Туризм”) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л.Б. Коваленко, С.М. Мордовцев, Є.С.Пахомова. – Х.: ХНАМГ, 2011, -119 с.

Укладачі: Л.Б. Коваленко,
С.М. Мордовцев,
Є.С. Пахомова

Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджена з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Методичні вказівки та контрольні роботи містять контрольні завдання для студентів, які навчаються за заочною формою навчання, а також теоретичні матеріали, необхідні для виконання запропонованих завдань.

Рекомендовано для студентів спеціальностей „Менеджмент”, „Готельне господарство”, „Туризм”.

Рецензент: зав. кафедри вищої математики, доктор фізико-математичних наук, проф. Колосов А.І.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
протокол №1 від 01.09.2010 р.

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. ВИЗНАЧНИКИ

Визначення 1.1. ***Визначником*** n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Позначають визначник ще як det від $determinate$ - «визначати», або $|a_{ij}|$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$.

Визначення 1.2. Числа a_{ij} -називаються ***елементами визначника***, де i - номер рядка, а j – номер стовпця.

Елементи $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \dots\ ,\ a_{nn}$ утворюють головну діагональ визначника.

Наша задача – навчитися обчислювати визначники, тобто «знаходити число». Правило обчислення визначників базується на таких поняттях як мінор та алгебраїчне доповнення.

Визначення 1.3. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i –того рядка і j-того стовпця.

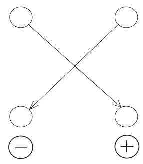
Визначення 1.4. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам’ятовування схеми обчислення.

Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми: та за правилом «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим же знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним».



Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$.

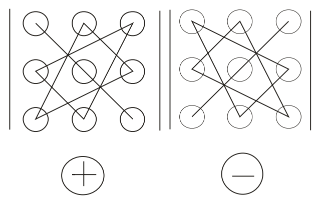
Розв'язання: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - 5 \cdot 7 = -12 - 35 = -47.$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми:



та за правилом «з тим же знаком беремо добуток елементів, що розташовані на головній діагоналі та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна головній діагоналі, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях; з протилежним знаком беремо добуток елементів, що розташовані на бічній діагоналі, яку утворюють елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}, та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна бічній діагоналі та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях».

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$-(-3) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 20 + 0 - 12 - 12 - 20 - 0 = -24.$$

Для обчислення визначників більш високих порядків таких зручних та легких для запам'ятовування схем не існує. Нам на допомогу прийде загальне правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначення 1.5. Визначник n-го порядку дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}. \qquad (1.2)$$

Подане правило має назву: розкриття визначника за елементами рядка (стовпця).

Приклад 1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, розкриваючи його: а) за елементами 4-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (0 + 4 + 0 - 0 + 2 - 60) +$$

$$+2 \cdot (0 + 12 + 0 - 0 + 4 - 40) + 4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8)$$

$$+2 \cdot (20 + 0 + 4 - 6 - 0 - 60) = -2 \cdot (-54) + 2 \cdot (-24) +$$

$$+4 \cdot (-36) + 2 \cdot (-42) = 108 - 48 - 144 - 84 = -168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -1 \cdot (-8 + 4 - 24 + 8 - 8 + 12) +$

$+5 \cdot (8 + 24 + 0 - 0 - 24 - 16) +$

$+4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8) =$

$= -1 \cdot (-16) + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot (-36) = 16 - 40 - 144 = -168.$

1.2. МАТРИЦІ

1.2.1. Основні визначення

Визначення 1.6. ***Матрицею*** $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Визначення 1.7. Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де i - номер рядка $(i = \overline{1,m})$, а j – номер стовпця $(j = \overline{1,n})$.

Визначення 1.8. Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною*** матрицею.

Визначення 1.9. Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої, дорівнюють *1*, а всі інші – *0*, називається ***одиничною***, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Визначення 1.10. Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

1.2.2. Операції над матрицями

Додавання (різниця) матриць. Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Визначення 1.11. ***Сумою (різницею)*** двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того же розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A + B = C, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \tag{1.5}$$

$$A - B = D, \qquad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.5. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 + (-2) & -5 + 2 & 2 + (-1) \\ 3 + 3 & 1 + 0 & -7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

$D = A - B = \begin{pmatrix} 4 - (-2) & -5 - 2 & 2 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - 0 & -7 - 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$.

<u>Множення матриць на число.</u>

Визначення 1.12. Добутком матриці A на число λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B = \lambda \cdot A, \qquad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Приклад 1.6. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 7$.

Розв'язання:

$$B = 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 42 \\ 14 & 63 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

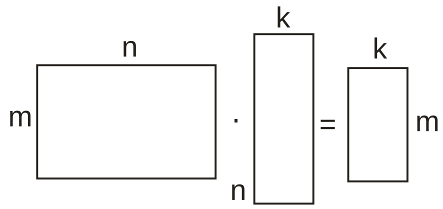
<u>Множення матриць.</u> Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої.

Визначення 1.13. Добутком матриць $A\ [m \times n]$ і $B\ [n \times k]$ називається матриця $C\ [m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

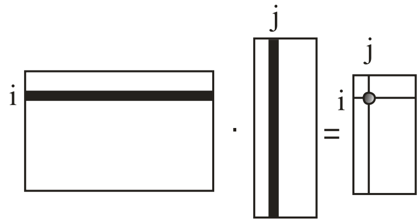
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj} \qquad (1.7)$$

$\left(\text{де } i = \overline{1,m}; j = \overline{1,k}\right)$.

Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити наступним чином:



Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так:



Щоб отримати елемент c_{ij}, необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. При виконанні цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження: В загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 1.7. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}.$$

В розглянутому прикладі можливі були операції множення $A \cdot B$ і $B \cdot A$. В результаті ми отримали матриці не тільки з різними елементами, але й різного розміру: у першому випадку ми отримали матрицю розміром 3×3, а в другому - 2×2.

Зауваження: Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць можлива завжди.

<u>Транспонування матриць</u>. Нехай A - матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.14. Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою*** матрицею відносно матриці A і позначається A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.9. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Обернена матриця</u>.

Визначення 1.15. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n-го порядку) називається ***оберненою*** до A, якщо

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$

Визначення 1.16. Квадратна матриця A n-го порядку називається ***невиродженою***, якщо її визначник $detA$ відрізняється від нуля, в протилежному випадку матриця називається ***виродженою***.

<u>*Теорема 1.2.*</u> Будь-яка невироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.

Обернену матрицю будемо знаходити за схемою:

1) обчислюємо визначник матриці $detA$;
2) знаходимо транспоновану матрицю A^T;
3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;
4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

5) виконуємо перевірку, обчислив $A\cdot A^{-1}=E$ або $A^{-1}\cdot A=E$.

Приклад 1.10. Знайти матрицю, обернену до

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$detA=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=12+0+12-60-0+12=-24;$$

$$A^T=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-4-4=-8;$$

$$A_{12}^T=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-(0-6)=6;$$

$$A_{13}^T=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=0-12=-12;$$

$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-20) = 24;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6-30 = -24;$

$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(-12-12) = 24;$

$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-10 = -8;$

$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3-0) = 3;$

$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6-0 = -6.$

$A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24+12-60 & 0+12-12 & -48+24+24 \\ -72-48+120 & 0-48+24 & 144-96-48 \\ 24+6-30 & 0+6-6 & -48+12+12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена вірно.

Відповідь: $A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

1.3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1.3.1. Основні визначення

Визначення 1.17. ***Система*** m ***лінійних рівнянь*** з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.10}$$

де числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи; b_i - вільними членами; $x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомими.

Визначення 1.18. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називається ***розв'язком системи*** (1.10), якщо заміна невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відповідно, кожне рівняння системи перетворює в тотожність.

Визначення 1.19. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язка.

Визначення 1.20. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо розв'язків більш, ніж один.

Визначення 1.21. Система рівнянь (1.10) називається ***однорідною***, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю; і ***неоднорідною***, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

1.3.2. Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.11)$$

Визначення 1.22. Визначник, що складений з коефіцієнтів при невідомих a_{ij} системи (1.11), називається ***визначником системи*** Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Визначення 1.23. Δ_k - це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною k-го стовпця вільними членами системи:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

<u>Теорема Крамера</u>. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \;\; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.14)$$

Формули (1.14) мають назву ***формул Крамера***.

Зауваження. Недоцільно використання формул Крамера у системах з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення $n+1$ визначника n порядку. Тому формули Крамера, частіше за все, використовують для розв'язання систем 2-4 порядків.

Приклад 1.11. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10. \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$.

1.3.3. Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.11). Поставимо у відповідність системі (1.11) матричне рівняння

$$A \cdot X = B, \qquad (1.15)$$

де A - матриця коефіцієнтів при невідомих, X - стовпець невідомих, B - стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що визначник A (визначник матриці A) системи (1.11) відрізняється від нуля. За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок. З іншого боку, для невиродженої матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (1.15) зліва на A^{-1}. Така операція можлива, тому що A^{-1} - квадратна матриця n-го порядку, а матриці-стовпці X і B мають розмір $n \times 1$. Отримаємо

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.11), представлену у вигляді (1.15), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1.16)$$

Зауваження. Як і у випадку використання формул Крамера, матричний метод не застосовують при розв'язанні систем з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення одного визначника n порядку (визначник матриці A) та n визначників $(n-1)$-го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад 1.12. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання: Запишемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця невироджена і обернена до неї існує. Транспонуємо матрицю:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$

$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$

$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$

$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$

$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$

$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$

Множник $(-1)^{i+j}$ тут враховано.

Отже обернена матриця має вигляд:

$A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$

Скористаємося формулою (1.16):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

1.3.4. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

У попередньому розділі ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів та навички в їх використанні знадобляться нам у розв'язанні прикладних економічних задач. Познайомимося з основними визначеннями та формулами.

Визначення 1.24. Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1,2, \dots n)$ називаються ***співвідношеннями балансу***, де x_i - об'єми валового продукту i-тої галузі для невиробничого споживання, x_{ij} - об'єм продукції i -тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j-тою галуззю $(i = 1,2, \dots n)$.

Співвідношення балансу можуть бути записані:

а) у вигляді $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$ $(i = 1,2, \dots n)$ (1.17)

де

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1,2, \dots, n) \tag{1.18}$$

- ***коефіцієнти прямих витрат***, які вказують на витрати продукції i-тої галузі на виробництво одиниці продукції j-тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$X = AX + Y \tag{1.19}$$

або

$$(E - A)X = Y \tag{1.20}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$ (1.21)

X - вектор валового випуску, Y - вектор кінцевого продукту, A - матриця прямих витрат.

Головна задача міжгалузевого балансу складається у знаходженні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY \qquad (1.22)$$

де матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат***, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_j = 1$ $(j = 1,2, \dots, n)$.

Зауваження. Матриця $A \geq 0$ називається ***продуктивною***, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (1.20).

Матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2, \dots, n$ та $\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Визначення 1.25. ***Чистою продукцією галузі*** називається різниця між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними визначеннями для розв'язання задач.

Приклад 1.13. В таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,4</td><td>0,35</td><td>400</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,2</td><td>0,15</td><td>300</td></tr>
</table>

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %.

Розв'язання:

1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів в кожному рядку і в кожному стовпці менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця повних витрат $S = (E - A)^{-1}$ знаходиться за добре відомою нам схемою знаходження оберненої матриці:

$\det(E-A) = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,51 - 0,07 = 0,44;$

$(E-A)^T = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,35 & 0,85 \end{pmatrix};$

$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,35; \quad A_{21}^T = 0,2; \quad A_{22}^T = 0,6;$

$S = (E-A)^{-1} = \frac{1}{0,44}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,35 \\ 0,25 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix}.$

Знайдемо вектор валового продукту X за формулою (1.22):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772 + 240 \\ 228 + 408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1012 \\ 636 \end{pmatrix}$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2.

Міжгалузеві поставки x_{ij} знайдемо за формулою (1.18):

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,4 \cdot 1012 = 404,8;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,35 \cdot 636 = 222,6;$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 1012 = 202,4;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,15 \cdot 636 = 95,4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі

$x_{11} + x_{21} = 404,8 + 202,4 = 607,2;$

- другої галузі

$$x_{12} + x_{22} = 222,6 + 95,4 = 318,0.$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: $1012 - 607{,}2 = 404{,}8$;
- другої галузі: $636 - 318 = 318$.

Всі отримані результати зведені в таблиці 1.2:

Таблиця 1.2

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Вироб-ництво	Галузь1	404,8	222,6	400	1012
	Галузь2	202,4	95,4	300	636
Чиста продукція		404,8	318		
Валова продукція		1012	636		

2) знайдемо вектор кінцевого споживання Y, з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1{,}1 \\ 300 \cdot 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix}.$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Скористаємося формулою (1.22):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}93 & 0{,}80 \\ 0{,}57 & 1{,}36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 849{,}2 + 312 \\ 250{,}8 + 530{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1161{,}2 \\ 781{,}2 \end{pmatrix}$$

Розділ 2. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

2.1. Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0. Так може статися, що відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A. Тоді кажуть, що число A - границя функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Визначення 2.1. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \quad (2.1)$$

2.2. Нескінченно малі і нескінченно великі величини та їх властивості

Визначення 2.2. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \quad (2.2)$$

Тобто якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа M можна підібрати таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде справедлива і нерівність $|f(x)| > M$, то $y = f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Наприклад, функції $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \to 2$; $y = \frac{5}{x^2}$ при $x \to 0$; $y = 4^x$ при $x \to \infty$ є нескінченно великими.

Зауваження 1. Не можна змішувати поняття дуже великого числа з нескінченно великою величиною! Наприклад, число $10^{10^{10^{10}}}$ є величиною колосальною, але є сталою величиною і не прямує до нескінченності.

Визначення 2.3. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x \to x_0$, якщо її границя при $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \qquad (2.3)$$

Наприклад, функції $y = (x-2)^3$ при $x \to 2$; $y = 4(x+3)$ при $x \to -3$; $y = 5^x$ при $x \to -\infty$ є нескінченно малими.

Зауваження 2. Не можна змішувати поняття дуже малого числа з нескінченно малою величиною! Єдине число, яке ми вважаємо нескінченно малою величиною є 0, тому що границя константи дорівнює самій константі.

2.3. Основні теореми про границі функції

***Теорема 1*.** Границя алгебраїчної суми кінцевого числа доданків дорівнює сумі границь доданків:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} u_1 + \lim\nolimits_{x\to x_0} u_2 + \cdots + \lim\nolimits_{x\to x_0} u_n. \qquad (2.4)$$

***Теорема 2*.** Границя добутку кінцевого числа множників дорівнює добутку границь множників:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n) =$$

$$= \lim\nolimits_{x\to x_0} u_1 \cdot \lim\nolimits_{x\to x_0} u_2 \cdot \ldots \cdot \lim\nolimits_{x\to x_0} u_n. \qquad (2.5)$$

***Наслідок 1*.** Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim\nolimits_{x\to x_0} c \cdot u = c \cdot \lim\nolimits_{x\to x_0} u. \qquad (2.6)$$

***Теорема 3*.** Границя частки дорівнює частці цих границь, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} u}{\lim\limits_{x\to x_0} v}, \text{ якщо } \lim_{x\to x_0} v \neq 0. \qquad (2.7)$$

2.4. Невизначеності. Розкриття деяких типів невизначеностей

Визначення 2.4. Дріб, в якому і чисельник, і знаменник є змінними величинами, які прямують до нуля, називається ***невизначеністю*** типу $\frac{0}{0}$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Зауваження 1: Крім невизначеності $\frac{0}{0}$ є також невизначеності: $\frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0\infty},\ 0^{0}$..

Зауваження 2: При обчисленні границь нам часто прийдеться працювати з нескінченно малими та нескінченно великими величинами. Спробуємо узагальнити вивченні поняття та властивості у таблиці 2.1. Відзначимо, що дії з нескінченно малими та нескінченно великими величинами мають умовний характер.

Таблиця 2.1.

$a\cdot 0=0$	$a\cdot\infty=\infty$
$\frac{0}{a}=0$	$\frac{\infty}{a}=\infty$
$\frac{a}{0}=\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$

1. Невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана у формі

$$\lim_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P},$$

необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити критичний множник $(x-a)$ і скоротити дріб на нього.

Зауваження 1. Критичний множник $(x-a)$ обов'язково виділиться і в чисельнику, і в знаменнику, тому що

$(x-a)$ є коренем обох многочленів, звідси прямує, що з наслідку теореми Бізу обидва многочлени можуть бути поділені на $(x-a)$ без залишку.

Зауваження 2. Можливо, що операцію скорочення на критичний множник прийдеться виконувати декілька разів.

Формули, що використовуються:

- розкладання квадратного тричлена на множники:
  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – кор.-ні квадратного тричлена;
- формули скороченого множення:
  а) різниця квадратів: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
  б) сума (різниця) кубів:
  $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$;
  в) квадрат суми (різниці):
  $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$;
  г) куб суми (різниці):
  $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+2ab^2 \pm b^3$ і т.п.

Приклад 2.1. Обчислити границю функції $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8}$.

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В чисельнику розкладемо квадратний тричлен на множники, а в знаменнику скористаємося формулою суми кубів: $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8} = \left|\frac{0}{0}\right| =$ $\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)}{(x^2-2x+4)} = -\frac{5}{12}$.

2. Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типа $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів, необхідно і чисельник, і знаменник скоротити на найбільшу степінь многочленів, що входить у функцію.

Приклад 2.2. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, скористаємося таблицею 2.1, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}}=\frac{5}{2}.$$

Приклад 2.3. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^5, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{4}{x^5}}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Приклад 2.4. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}}{5-\frac{3}{x}-\frac{12}{x^3}}=\frac{0}{5}=0.$$

Якщо уважно проаналізувати розв'язання прикладів 2.2-2.4, можна відзначити цікаву закономірність: результат визначається співвідношенням максимальних степенів многочленів чисельника і знаменника. Узагальнимо ці спостереження у вигляді формули:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}\infty, & n>m\\ 0, & n<m\\ \frac{A}{L}, & n=m\end{cases} \qquad (2.8)$$

Зауваження. При обчисленні більш складних границь ми зможемо використовувати (2.8) не запобігаючи попередніх обчислень.

3. <u>Невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty-\infty$, що задані ірраціональними виразами</u>

Правило. Щоб розкрити невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty-\infty$ у функціях, які мають ірраціональності, необхідно належним образом позбутися ірраціональності.

Формули, що використовуються: формули скороченого множення і, при необхідності, розкладання квадратного тричлена на множники (см. п.1).

Приклад 2.5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Чисельник розкладемо на множники, а щоб позбутися ірраціональності у знаменнику, скористаємося формулою різниці квадратів. Помножимо і чисельник, і знаменник на множник $\sqrt{x+4}+3$, звідси маємо

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x+4-3^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)=4\cdot 6=24.$$

Приклад 2.6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В даній функції маємо ірраціональність і в чисельнику, і в знаменнику. Щоб позбутися ірраціональності і чисельник, і знаменник одночасно помножимо на $\left(\sqrt{x+5}+2\right)$ і $\left(\sqrt{2x+11}+3\right)$. Отже маємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+11}-3\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=$$

$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+5-4)(\sqrt{2x+11}+3)}{(2x+11-9)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{2x+11}+3)}{2(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$

$= \lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{2x+11}+3)}{2(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{3}{4}.$

2.5. Важливі границі та їх застосування

Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ має границю, яка дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\alpha}{\alpha} = 1. \qquad (2.9)$$

Приклад 2.7. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}$.

Розв'язання: $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{a\cdot sinax}{a\cdot x} =$

$= \begin{bmatrix} y = ax \\ y \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{a\cdot siny}{y} = a\cdot 1 = a.$

Приклад 2.8. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}$.

Розв'язання:$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sinax}{x\cdot sinbx} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{sinbx} = \frac{a}{b}.$

Приклад 2.9. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x}$.

Розв'язання:$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\frac{1}{cosax} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{cosax} = a\cdot 1 = a.$

Приклад 2.10. Обчислити границю функції $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}$.

Розв'язання: $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$$\begin{bmatrix} x = siny \\ arcsinx = arcsin(siny) = y \\ y \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{siny} = 1.$$

Приклад 2.11. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 5x - sin^2 x}{7x^2}.$$

Розв'язання: $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 5x - sin^2 x}{7x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(sin5x - sinx)(sin5x + sinx)}{7x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2sin2xcos3x \cdot 2sin3xcos2x}{7x^2} =$

$= \frac{4}{7} \lim_{x\to 0} \frac{sin2x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} cos3x \cdot cos2x =$

$= \frac{4}{7} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{24}{7}.$

Приклад 2.12. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot tgx.$$

Розв'язання: Застосовувати першу важливу границю можна лише за умови, що аргумент функції прямує до нуля. Оберемо нову змінну, яка буде прямувати до нуля, зробимо відповідні перетворення

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot tgx = |0 \cdot \infty| = \begin{bmatrix} y = \frac{\pi}{2} - x \\ y \to 0 \end{bmatrix} =$

$= \lim_{y\to 0} y \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y\to 0} y \cdot ctgy =$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y \cdot cosy}{siny} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{siny} \cdot \lim_{y\to 0} cosy = 1 \cdot 1 = 1.$

Ми розглянули багато прикладів на застосування першої важливої границі і можемо зробити деякі висновки. По-перше, завдання на обчислення границі за допомогою першої важливої границі потребують від нас знання основних тригонометричних формул і вміння їх правильно застосовувати; по-друге, наслідки першої важливої границі (деякі з них ми вже довели) можна застосовувати нарівні з самою теоремою.

<u>Наслідки першої чудової границі</u>:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$;
2) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1$;
3) $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;
4) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}=a$;
5) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\frac{a}{b}$.

<u>Друга важлива границя</u>

<u>Теорема</u>. Функція $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ має границю, яка дорівнює e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2.10}$$

Зауваження. За допомогою другої важливої границі розкриваються невизначеності типу 1^{∞}.

Приклад 2.13. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}.$$

Розв'язання. Скористаємося другою важливою границею: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=|1^{\infty}|=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{4}=e^{4}.$

Приклад 2.14. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x}.$$

Розв'язання. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x}=|1^{\infty}|=$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}}\right)^{\frac{7}{x-2}\cdot 5x}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{35x}{x-2}}=e^{35}.$$

Приклад 2.15. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1}.$$

Розв'язання. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1}=|1^{\infty}|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3}{4x+5}-1\right)^{6x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3-4x-5}{4x+5}\right)^{6x-1}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{\frac{4x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{4x+5}\cdot(6x-1)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-8(6x-1)}{4x+5}}=e^{-12}.$$

Приклад 2.16. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)].$$

Розв'язання: Звернемо увагу, що в даному прикладі ми змушені позбавлятися невизначеності типу $|\infty-\infty|$. Як ми зауважили, що друга важлива границя допомагає позбавлятися невизначеності типу $|1^{\infty}|$. Але, згадав властивості логарифмів, нам вдасться звести дану границю до другої важливої границі.

$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)] = |\infty-\infty| =$

$= \lim_{x\to\infty}(2x+3)ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right) = \lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)} =$

$= ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)} = |1^{\infty}| =$

$= ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x+2}{5x-4}-1\right)^{(2x+3)} =$

$= ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x-4}\right)^{\frac{5x-4}{6}}\right)^{\frac{6}{5x-4}\cdot(2x+3)} =$

$= lne^{\lim_{x\to\infty}\frac{6(2x+3)}{5x-4}} = lne^{\frac{12}{5}} = \frac{12}{5}lne = \frac{12}{5}.$

Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ

3.1.1. Визначення похідної

Визначення 3.1. ***Похідною*** даної функції називається границя відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля, якщо така границя існує:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

3.1.2. Основні правила диференціювання

Похідна суми.

<u>Теорема 1</u>. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі похідних доданків.

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \qquad (3.2)$$

Похідна добутку.

<u>Теорема 2</u>. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу.

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \qquad (3.3)$$

Наслідок. Справедливі формули

$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'}. \qquad (3.4)$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}}. \qquad (3.5)$$

Похідна частки.

<u>Теорема 3</u>. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника.

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}. \qquad (3.6)$$

Наслідок. Справедлива формула $\boxed{\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}}$. (3.7)

3.1.3. Похідна складної функції

Теорема. Похідна складної функції дорівнює похідної даної функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну цього аргументу по незалежній змінній.

$$\boxed{y' = f'_u \cdot u'_x} \qquad (3.8)$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її складають.

Приклад 3.1. Знайти похідну функції

$$y = \left(15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3}\right)^{11}.$$

Розв'язання: Представимо цю функцію у вигляді ланцюжка $y = u^{11}, u = 15 - \sqrt[3]{v}, \quad v = 2x^7 - 3$, отримаємо

$$y' = (u^{11})' \cdot \left(15 - \sqrt[3]{v}\right)' \cdot (2x^7 - 3)' = 11u^{10} \cdot \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot 7x^6 =$$

$$= \frac{154}{3}\left(15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3}\right)^{10} \cdot \frac{x^6}{\sqrt[3]{(2x^7-3)^2}}.$$

3.1.4. Таблиця похідних

Організуємо нашу таблицю наступним чином: ліворуч розташуємо формули для обчислення похідних простих функцій, а праворуч – складних. Незважаючи та те, що ці формули начебто дублюють один одного, але, на наш погляд, таке подання формул полегшує знаходження похідних, і ми спробуємо в цьому переконати на прикладах, які розглянемо після запису таблиці.

Таблиця 3.1. Таблиця похідних.

$y = f(x)$	$y = f\big(u(x)\big)$
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot lna$	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$
$(lnx)' = \frac{1}{x}$	$(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(sinx)' = cosx$	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
$(cosx)' = -sinx$	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
$(tgx)' = \frac{1}{(cosx)^2}$	$(tgu)' = \frac{1}{(cosu)^2} \cdot u'$
$(ctgx)' = -\frac{1}{(sinx)^2}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{(sinu)^2} \cdot u'$
$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приклад 3.2. Знайти похідну функції

$$y = 7x^5 - 15\log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3arctgx - 11.$$

Розв'язання: Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний з доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$y' = 7(x^5)' - 15(\log_3 x)' - 4 \cdot (2^x)' + 3(arctgx)' - (11)' =$

$= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{xln3} - 4 \cdot 2^x \cdot ln2 + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 0 =$

$= 35x^4 - \frac{15}{xln3} - 4 \cdot 2^x ln2 + \frac{3}{1+x^2}.$

Приклад 3.3. Знайти похідну функції

$$y = (7arcsinx - 15) \cdot (2lnx + 3x^2).$$

Розв'язання: Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (3.3). Для цього розіб'ємо функцію на $u = 7arcsinx - 15$ і $v = 2lnx + 3x^2$. Знайдемо u' і v':

$$u' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v' = \frac{2}{x} + 6x.$$

За формулою (3.3) маємо:

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2lnx + 3x^2) + (7arcsinx - 15) \cdot \left(\frac{2}{x} + 6x\right).$$

Приклад 3.4. Знайти похідну функції $y = \frac{2e^x - cosx}{5tgx+8}$.

Розв'язання: Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (3.6). Для цього розіб'ємо функцію на $u = 2e^x - cosx$ і $v = 5tgx + 8$. Знайдемо u' і v':

$$u' = 2e^x + sinx; \quad v' = \frac{5}{cos^2x}.$$

За формулою (3.6) маємо:

$$y' = \frac{(2e^x + sinx)\cdot(5tgx+8) - (2e^x - cosx)\cdot\frac{5}{cos^2x}}{(5tgx+8)^2} =$$

$$= \frac{(2e^x + sinx)\cdot(5tgx+8)\cdot cos^2x - 5(2e^x - cosx)}{(5tgx+8)^2\cdot cos^2x}.$$

Приклад 3.5. Знайти похідну функції

$$y = ln\, arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right).$$

Розв'язання: Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо скористатися наступним прийомом: будемо промовляти кожного разу послідовність, в якої утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в оберненому порядку. Тут можна провести аналогію процесу одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в оберненому.

Промовимо, що потрібно зробити, щоб знайти y за наданою формулою:

- помножимо x на 3;
- аргумент $3x$ возведемо до експоненти;
- з одиниці віднімемо отриману функцію;
- візьмемо корінь квадратний з цього виразу;
- додамо одиницю;
- обчислимо арктангенс;

- візьмемо логарифм отриманого виразу.

Отже, знаходження функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

Скористаємося формулою $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \left(arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)\right)'.$$

Читаємо наш список в оберненому порядку. Тепер будемо диференціювати арктангенс, а за u приймемо

$u = 1 + \sqrt{1 - e^{3x}}$:

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)'.$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференцюємо за формулою $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = 1 - e^{3x}$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})'.$$

Тепер похідна від експоненти:

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (-e^{3x}) \cdot (3x)'.$$

Остаточно маємо:

$$y' = -\frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{3x}}\, arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)\left(1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2\right)}.$$

Кожного разу при диференціюванні складних функцій ми будемо діяти аналогічно.

Приклад 3.6. Знайти похідну функції

$$y = sin^4 5x \cdot \log_7(tg3x + 18).$$

Розв'язання: Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (3.3):

$$u = sin^4 5x; v = \log_7(tg3x + 18).$$

$u' = 4sin^3 5x \cdot (sin5x)' = 4sin^3 5x \cdot cos5x \cdot (5x)' =$

$= 20sin^3 5xcos5x$;

$v' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot (tg3x + 18)' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot (3x)' =$

$= \frac{3}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$

Остаточно маємо:

$$y' = 20sin^3 5xcos5x \cdot \log_7(tg3x + 18) + \frac{3sin^4 5x}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$$

Приклад 3.7. Знайти похідну функції $y = \frac{5^{arcctg8x^3}}{ln^2(cos9x)}$.

Розв'язання: Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (3.6): $u = 5^{arcctg8x^3}$; $v = ln^2(cos9x)$.

$u' = 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot (arcctg8x^3)' =$

$= 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot \left(-\frac{1}{1+(8x^3)^2}\right) \cdot (8x^3)' =$

$= -\frac{5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot 24x^2}{1+64x^6};$

$v' = 2ln(cos9x) \cdot \left(ln(cos9x)\right)' = 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (cos9x)' =$

$= 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (-sin9x) \cdot (9x)' = -18ln(cos9x) \cdot tg9x.$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{-\frac{5^{arcctg8x^3}\cdot ln5\cdot 24x^2}{1+64x^6}\cdot ln^2(cos9x) - 5^{arcctg8x^3}\cdot(-18ln(cos9x)\cdot tg9x)}{\left(ln^2(cos9x)\right)^2} =$$

$$= \frac{6\cdot 5^{arcctg8x^3}\cdot ln(cos9x)\left(3tg9x\cdot(1+64x^6) - 4x^2 ln5\cdot ln(cos9x)\right)}{ln^4(cos9x)} =$$

$$= \frac{6\cdot 5^{arcctg8x^3}\left(3tg9x\cdot(1+64x^6) - 4x^2 ln5\cdot ln(cos9x)\right)}{ln^3(cos9x)}.$$

3.1.5. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x. Похідна від отриманої функції (якщо вона існує) називається похідною другого порядку або другою похідною від функції і позначається $f''(x)$.

За визначенням похідної

$$f''^{(x)} = \left[f'^{(x)}\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо існує ця границя, то існує і друга похідна функції $y = f(x)$.

Саме так визначається і похідна третього порядку (як похідна від другої похідної) і так далі. Тому можемо дати визначення.

Визначення 3.2. ***Похідною n-го порядку $f^{(n)}(x)$*** називається похідна від похідної $(n-1)$–го порядку

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Похідні вищих порядків мають велике прикладне значення для визначення фундаментальних понять математики, фізики та ін.

Так, наприклад, згадаємо, що поняття похідної ми вводили розв'язуючи задачу про швидкість руху матеріальної точки. Похідна ж другого порядку характеризує швидкість зміни швидкості, або прискорення функції. Зауважимо, що надалі ми ще скористаємося похідними вищих порядків для дослідження функцій.

Приклад 3.8. Знайти третю похідну функції $y = x^3 arctgx$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання: Згідно з визначенням, нам необхідно поступово знайти похідні першого, другого (як похідну від першої похідної) і третього (як похідну від другої похідної) порядку:

$y' = 3x^2 \cdot arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot arctgx + \frac{x^3}{1+x^2};$

$y'' = (y')' = 6x \cdot arctgx + 3x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$

$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} =$

$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2+3x^4+3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = 6x \cdot arctgx + \frac{4x^4+6x^2}{(1+x^2)^2};$

$y''' = (y'')' = 6 \cdot arctgx + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} +$

$+ \frac{(16x^3+12x)(1+x^2)^2 - (4x^4+6x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$

$= 6 \cdot arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} =$

$= 6arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} =$

$= 6arctgx + \frac{6x(1+x^2)^2+4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} =$

$= 6arctgx + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0: $y'''(0) = 0$.

3.1.6. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна и диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Визначення 3.3. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції***:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx:

$$\Delta x = dx.$$

Отже, остаточно маємо:

Диференціал функції дорівнює її похідної, помноженої на диференціал незалежної змінної:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}. \tag{3.10}$$

Бачимо, що якщо відома похідна, легко знайти диференціал, та навпаки, якщо відомий диференціал, відразу знаходимо похідну. Тому дії знаходження похідної та диференціала мають спільну назву – ***диференціювання***.

3.2. ГРАНИЧНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Застосування похідної при розв'язанні економічних задач дозволяє отримувати граничні характеристики економічних об'єктів та процесів, таких як, наприклад, гранична виручка, корисність, продуктивність і т.п. Ці граничні характеристики визначають швидкість зміни економічного об'єкта або процесу.

Нехай витрати виробництва y будемо розглядати як функцію продукції, x, що випускається, тобто $y = C(x)$.

Визначення 3.4. ***Граничні витрати*** виробництва, які характеризують приріст змінних затрат на виробництво додаткової одиниці продукції – це похідна від функції продукції, що випускається:

$$y' = C'(x). \tag{3.11}$$

Середні витрати є витратами на випуск одиниці продукції:

$$y_1 = \frac{C(x)}{x}. \tag{3.12}$$

Нехай функція $u(t)$ описує виробництво продукції y за час t.

Визначення 3.5. Похідна від об'єму виробленої продукції за часом $u'(t_0)$ є ***продуктивність праці*** в момент часу t_0.

Введемо поняття функцій витрат та збереження. Нехай x - національний доход, $C(x)$ - функція споживання (частина доходу, що споживається), а $S(x)$ - функція збереження (частина доходу, що зберігається), тоді

$$x = C(x) + S(x). \qquad (3.13)$$

Диференцюємо обидві частини (3.13), маємо

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1 \qquad (3.14)$$

де $\frac{dC}{dx}$ -гранична прихильність до споживання;

$\frac{dS}{dx}$ - гранична прихильність до збереження.

Визначення 3.6. ***Еластичність*** – це міра реагування однієї змінної величини на зміну другої. Еластичність функції наближено вказує, на скільки відсотків зміниться одна змінна величина в результаті зміни іншої на 1 %.

Еластичність функції визначають за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \quad \text{або} \quad E_x(y) = x \cdot T_y, \qquad (3.15)$$

де $T_y = (lny)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$- ***відносна швидкість зміни (темп)*** функції.

Поняття еластичності функції застосовують при аналізі попиту і пропозиції від ціни товару (***цінова еластичність***). Вона характеризує реакцію попиту або пропозиції на зміну ціни і визначає, на скільки відсотків наближено зміниться попит або пропозиція при зміни ціни на 1%.

Якщо еластичність попиту $|E_x(y)| > 1$, то попит є ***еластичним***, якщо $|E_x(y)| = 1$ – ***нейтральним***, а якщо $|E_x(y)| < 1$ - ***нееластичним*** відносно ціни.

Приклад 3.9. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1{,}2x^3 + 0{,}3x^2 - 4x + 120$

(грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = 20$.

Розв'язання:

Середні витрати:

$y_1(x) = \frac{C(x)}{x} = 1{,}2x^2 + 0{,}3x - 4 + \frac{120}{x}$;

$y_1(20) = 1{,}2 \cdot 400 + 0{,}3 \cdot 20 - 4 + \frac{120}{20} = 488.$

Граничні витрати:

$y'(x) = C'(x) = 3{,}6x^2 + 0{,}6x - 4$;

$y'(20) = 3{,}6 \cdot 400 + 0{,}6 \cdot 20 - 4 = 1448.$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на даному рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 488 грошових одиниць, а збільшення об'єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 1448 грошових одиниці.

Приклад 3.10. Об'єм виробництва побутової техніки деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 3250$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) в першому кварталі $(t = 3)$; в) в другому кварталі $(t = 6)$; г) в третьому кварталі $(t = 9)$; д) наприкінці року $(t = 12)$.

Розв'язання:

Продуктивність праці – похідна від об'єму виробництва:

$z(t) = u'(t) = 2t^2 - 5t + 4$ (од./міс.).

Швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:

$v_z = z'(t) = 4t - 5$ (од./міс.^{2}).

Темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:

$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{4t-5}{2t^2-5t+4}$ (од./міс.).

а) $\underline{t = 0}$:

$z(0) = 4$ (од./міс.); $v_z(0) = -5$ (од./міс.^{2}); $T_z(0) = -\frac{5}{4}$ (од./міс.);

б) $\underline{t = 3}$:

$z(3) = 18 - 15 + 4 = 7$(од./міс.); $v_z(3) = 12 - 5 = 7$ (од./міс.^{2}); $T_z(3) = 1$ (од./міс.);

в) $\underline{t = 6}$:

$z(6) = 72 - 30 + 4 = 46$ (од./міс.);

$v_z(6) = 24 - 5 = 19$ (од./міс.^{2}); $T_z(6) = \frac{19}{46}$ (од./міс.);

г) $\underline{t = 9}$:

$z(9) = 162 - 45 + 4 = 121$ (од./міс.);

$v_z(9) = 36 - 5 = 31$ (од./міс.^{2}); $T_z(9) = \frac{31}{121}$ (од./міс.);

д) $\underline{t = 12}$:

$z(12) = 288 - 60 + 4 = 232$ (од./міс.);

$v_z(12) = 48 - 5 = 43$ (од./міс.^{2}); $T_z(12) = \frac{43}{232}$ (од./міс.).

3.3. ПОВЕДІНКА ФУНКЦІЇ В ІНТЕРВАЛІ

3.3.1. Ознаки монотонності функції

<u>Теорема</u>. Для того щоб диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ зростала (спадала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу похідна функції була невід'ємной, тобто $f'(x) \geq 0$ (недодатной $f'(x) \leq 0$).

3.3.2. Екстремуми функції

Особливу увагу потрібно приділити тим значенням не залежної змінної x, які від-окремлюють інтервал зростання від інтервалу спадання або інтервал спадання від інтервалу зростання функції (рис. 3.1).

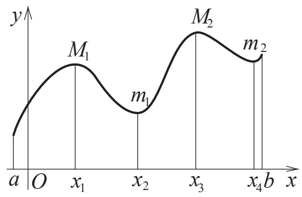


Рис. 3.1.

Визначення 3.7. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 3.2, а).

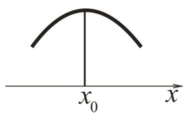


Рис. 3.2, а

Визначення 3.8. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції в деякому околі

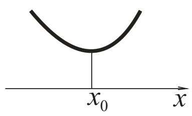


Рис. 3.2, б

точки x_0 (рис. 3.2, б).

Точки максимуму та мінімуму називаються точками ***екстремуму*** функції.

<u>Теорема</u> *(необхідна ознака екстремуму)*. Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$, або не існує.

<u>Теорема</u> *(достатня ознака існування екстремуму функції).* Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака $+$ на $-$ точка x_0 є точкою максимуму, при зміні $-$ на $+$ точка x_0 є точкою мінімуму.

3.3.3. Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів монотонності та екстремумів функції як в кінцевому, так і в нескінченному інтервалі.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові

інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.

4. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає, якщо $f'(x) < 0$ - спадає.
5. Прослідкуємо за зміною знака похідної при переході зліва направо через границі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які – максимумами. Може так статися, що деяка точка не є точкою екстремуму функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, похідна має однаковий знак.
6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.

Приклад 3.11. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання:

Встановимо область визначення функції (ОВФ): $x + 1 \neq 0$; $x \neq -1$, тобто $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$.

Знайдемо критичні точки $y' = 0$; $\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = 0$; $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$.

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таблицю:

x	$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	–	не існує	–	0	+
y	зростає	$y_{max} = \frac{27}{4}$	спадає		спадає	$y_{min} = 0$	зростає

або на числову пряму (рис. 3.3):

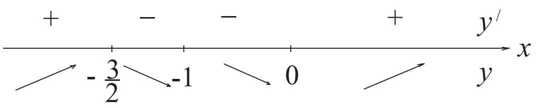


Рис. 3.3.

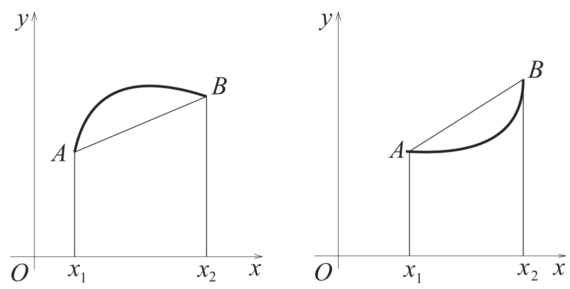
Отже, функція зростає на інтервалі $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$, спадає на інтервалі $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0)$. В точці $x = -\frac{3}{2}$ функція має максимум: $y_{max} = \frac{27}{4}$, а в точці $x = 0$ - мінімум: $y_{min} = 0$.

3.3.4. Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину

Визначення 3.9. Дуга називається ***опуклою***, якщо вона перетинається з будь-якою своєю січною не більш, ніж в двох точках.

Якщо дуга опукла, вона цілком розташована по одну сторону від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може обертатися як опуклістю вгору (рис. 3.4, а), або донизу (рис. 3.4, б).

Лінії, обернені опуклістю вгору, називаються ***опуклими*** (опукла дуга розташована під дотичною); лінії, обернені опуклістю донизу, називаються ***угнутими*** (опукла дуга розташована над дотичною).



(а) (б)

Рис. 3.4.

Особливу роль грають точки, які відділяють інтервали опуклості і угнутості функції.

Визначення 3.10. ***Точкою перегину*** функції називається точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

В точці перегину функції дотична перетинає лінію; в околі цієї точки лінія розташована по обидві сторони від дотичної.

З’ясуємо ознаки опуклості та угнутості функції та умови існування точок перегину.

Теорема. Для того щоб двічі диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ була опукла (угнута) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу друга похідна функції була від'ємною, тобто $f''(x) \geq 0$ (додатною $f''(x) \leq 0$).

Теорема. *(необхідна умова існування точок перегину).* Якщо в точці x_0 перегину функції $y = f(x)$ існує друга похідна, то вона дорівнює нулю: $f''(x_0) = 0$.

Теорема. *(достатня умова існування точок перегину).* Точка (x_0, y_0) (якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії $y = f(x)$, якщо друга похідна функції $f''(x)$ змінює знак при переході x через x_0.

3.3.5. Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів опуклості, угнутості і точок перегину.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, тобто точки, друга похідна в яких дорівнює нулю $f''(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) критичні точки та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких друга

похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або угнутості функції.

4. З'ясуємо знак другої похідної в кожному з часткових інтервалів, для чого достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком другої похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалі: якщо $f''(x) > 0$, то функція угнута, якщо $f''(x) < 0$ - опукла.
5. Простежимо за зміною знака другої похідної при переході через границі інтервалів опуклості і угнутості функції і з'ясуємо, які з критичних точок є точками перегину функції. Може так статися, що деяка критична точка не є точкою перегину функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, друга похідна має однаковий знак.
6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування точок перегину і обчислимо їх ординати.

Приклад 3.12. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Розв'язання: ОВФ: $x \in R$.

Знайдемо першу і другу похідні функції:

$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$; $\qquad y'' = 12x^2 - 72x + 96.$

Знайдемо критичні точки:

$y'' = 0; \qquad 12x^2 - 72x + 96 = 0| : 12.$

$x^2 - 6x + 8 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$.

Винесемо результати досліджень або в таблицю

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	угнута	$y_{\text{т.п.}} = 62$	опукла	$y_{\text{т.п.}} = 206$	угнута

або на числову вісь (рис. 3.5):

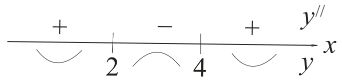


Рис. 3.5.

Отже, функція опукла на інтервалі $x \in (2; 4)$, угнута на інтервалі $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В точках $x = 2$ і $x = 4$ функція має перегин.

3.3.6. Застосування похідної в задачах з економічним змістом

Поняття похідної може бути використано у розв'язанні прикладних задач економіки. Введемо основні поняття.

Нехай відома ***функція витрат*** $\boldsymbol{C(x)}$, яка визначає необхідні витрати для виробництва x одиниць даного продукту. ***Прибуток виробництва*** $\boldsymbol{P(x)}$ визначається як різниця між ***доходом*** $D(x)$ ***від виробництва*** x одиниць продукту і функцією витрат:

$$P(x) = D(x) - C(x). \qquad (3.16)$$

Середні витрати $\boldsymbol{A(x)}$ при виробництві x одиниць продукції визначаються як

$$A(x) = \frac{C(x)}{x}. \qquad (3.17)$$

Граничні витрати $\boldsymbol{M(x)}$ на виробництво x одиниць продукції згідно з поняттям похідної будемо визначати як

$$M(x) = C'(x). \qquad (3.18)$$

Оптимальним значенням виробництва для виробника є те значення x одиниць продукції, при якому прибуток $P(x)$ є найбільшим. Тому для визначення величини оптимального значення виробництва, необхідно розв'язати задачу про найбільше значення функції.

Приклад 3.13. Виробнича фірма мінімізує середні витрати, які в результаті дорівнюють 50 грн./один. Чому при цьому дорівнюють граничні витрати?

Розв'язання: З (3.17) маємо: $C(x) = A(x) \cdot x = 50x$. За формулою (3.18) граничні витрати є похідна від функції витрат. Після її обчислення маємо:

$$M(x) = C'(x) = 50.$$

Отже, граничні витрати дорівнюють 50 грн./один.

Приклад 3.14. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 19$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 22 + 7x + x^3$.

Розв'язання: За формулою (3.16) прибуток визначається як $P(x) = D(x) - C(x) = 19x - 22 - 7x - x^3 = 12x - 22 - x^3$. Оптимальне значення випуску – значення, при якому прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Знайдемо похідну: $P'(x) = 12 - 3x^2$.

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто $12 - 3x^2 = 0$. Критичні точки: $x_{1,2} = \pm 2$. За умовою задачи зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 2$. В цій точці функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює $x_0 = 2$.

Приклад 3.15. Доход від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x) = 80\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 4 умовних одиниці. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

Розв'язання: За формулою (3.16) прибуток визначається як $P(x) = D(x) - C(x) = 80\sqrt{x} - 4x$. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну: $P'(x) = \frac{40}{\sqrt{x}} - 4$. Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто, $\frac{40}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{40-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, $\sqrt{x} = 10$. Критична точка: $x = 100$. Після з'ясування знаків похідної в кожному з часткових інтервалів, встановимо, що в цій точці функція набуває максимуму. Отже необхідно придбати 100 одиниць ресурсів, щоб прибуток був найбільшим.

Приклад 3.16. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд $C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється нарівні $p = 37$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Розв'язання: За формулою (3.17) функція середніх витрат виробництва має вигляд $A(x) = \frac{10}{x} + 2 + \frac{5}{2}x$. Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$A'(x) = -\frac{10}{x^2} + \frac{5}{2}$; $A'(x) = 0$; $\frac{-20x^2+5}{2x^2} = 0$;

$x^2 = 4$; $x = \pm 2$. Отже $x_0 = 2$.

Граничні витрати (3.18): $M(x) = C'(x) = 2 + 5x$.

Відомо, що прибуток (3.16) визначається як:

$P(x) = D(x) - C(x) = 37x - C(x)$.

Продиференцюємо даний вираз:

$P'(x) = 37 - C'(x) = 37 - M(x) = 37 - 2 - 5x = 35 - 5x$.

Знайдемо критичну точку:

$P'(x) = 0$; $35 - 5x = 0$; $x = 7$.

Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 7$. З цього прямує, що необхідно збільшити виробництво на 5 одиниць ($\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$).

З'ясуємо середні витрати виробництво

$A(2) = \frac{10+4+10}{2} = 12$;

$A(7) = \frac{10+14+\frac{5}{2}\cdot 49}{7} = \frac{293}{14}$;

$\Delta A = \frac{293}{14} - 12 = \frac{125}{14}$.

Отже, середні витрати зміняться на $\frac{125}{14}$.

Розділ 4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. ПЕРВІСНА

У попередніх розділах, коли вивчали диференціювання, розв'язували наступну задачу: як знайти похідну даної функції? Зараз поставимо перед собою обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

Визначення 4.1. Первісною від функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює даній функції:

$$F'(x) = f(x). \qquad (5.1)$$

Приклад 4.1. Знайти первісну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання: За визначенням 4.1 функція $\frac{1}{4}x^4$ є первісною, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$. Але й $\frac{1}{4}x^4 - 17$ і $\frac{1}{4}x^4 + 5$ теж є первісними, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4 - 17\right)' = x^3$; $\left(\frac{1}{4}x^4 + 5\right)' = x^3$.

Теорема. Будь-яка неперервна функція має несчислену множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються на сталу величину.

Визначення 4.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається як $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцію***, вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, знак $\int$ – ***знаком інтегралу***.

Визначення 4.3. Знаходження всіх первісних функції називається ***невизначеним інтегруванням*** (далі просто ***інтегруванням***) цієї функції.

За визначенням 4.1 маємо ***основні властивості невизначного інтегралу***:

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
- $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $\int df(x) = f(x) + C$.

4.2. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХІНТЕГРАЛІВ. ПРОСТІШІ ПРИЙОМИ ІНТЕГРУВАННЯ

В таблиці 4.1 безпосередньо зведені формули, необхідні для інтегрування. Ці формули випливають з формул диференціювання основних елементарних функцій. Будь-яка з наведених формул легко перевіряється диференціюванням.

Таблиця 4.1. Основна таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
3	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$
6	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \frac{du}{u} = lnu + C$
8	$\int cosu = sinu + C$
9	$\int sinu = -cosu + C$
10	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
11	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
12	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctgu + C$
13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{u-a}{u+a} \right\| + C$
14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$
15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$

Зауваження. В таблиці 4.1 буква u може позначати як незалежну змінну x, так і неперервну диференційовану функцію $u = u(x)$ аргументу x. Справедливість цього зауваження ми доведемо пізніше.

Теорема. Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (u + v)dx = \int udx + \int vdx. \quad (4.2)$$

Теорема. Константу можна виносити за знак інтегралу:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx. \quad (4.3)$$

Теорема ***(про інваріантність формул інтегру-вання).*** Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замінити незалежну змінну будь-якою диференційованою функцією від незалежної змінної, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{то} \qquad \int f(u)du = F(u) + C.$$

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то справедливі формули:

а) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$ (4.4)

б) $\int f(x + b)dx = F(x + b) + C;$ (4.5)

в) $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$ (4.6)

Проілюструємо застосування наведених теорем при безпосередньому інтегруванні.

Приклад 4.2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3)dx.$$

Розв'язання:

$\int(3x^5+8)(6x-7x^3)dx = \int(18x^6+48x-21x^8-56x^3)dx =$

$= 18\int x^6\,dx + 48\int xdx - 21\int x^8\,dx - 56\int x^3\,dx =$

$= \frac{18}{7}x^7 + 24x^2 - \frac{7}{3}x^9 - 14x^4 + C.$

4.3. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Познайомимося з найпоширенішим методом інтегрування – ***методом заміни змінної***. Диференціювати елементарні функції за допомогою таблиці інтегралів не складно. Для вдалого використання результатів теореми 4.5 необхідні великі навички, щоб швидко звести інтеграл до табличного. Але й теорема 4.5 не охоплює усіх можливих ситуацій. Спробуємо навчитися встановлювати підстановку (в кожному окремому випадку), за допомогою якої інтеграл може бути зведений до табличного. Допоможе нам в цьому наступна теорема.

<u>Теорема 4.6.</u> Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а функція $x = \varphi(t)$, то функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну

$$F(\varphi(t)) \text{ і } \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}. \qquad (4.7)$$

Приклад 4.3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin(4x-3)dx.$$

Розв'язання: $\int sin(4x-3)dx = \begin{bmatrix} u = 4x-3 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}du \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{4}\int sinudu = -\frac{1}{4}cosu + C = -\frac{1}{4}cos(4x-3) + C.$

Зауважимо, що розв'язати цю задачу можна і за формулою (4.6).

Приклад 4.4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{7x^2+4}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{7x^2+4} = \begin{bmatrix} u^2 = 7x^2 \\ u = \sqrt{7}x \\ du = \sqrt{7}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{7}}du \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{u^2+4} =$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} arctg\frac{u}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} arctg\frac{\sqrt{7}x}{2} + C.$

Приклад 4.5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання: $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} = \begin{bmatrix} u = 8-3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$= -\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2} + C.$

Приклад 4.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arcsin5x}.$$

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arccos^4 5x} = \begin{bmatrix} u = arccos5x \\ du = -\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = -\frac{1}{5}du \end{bmatrix} =$

$= -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-3}}{(-3)} + C = \frac{1}{15arccos^3 5x} + C.$

4.4. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

4.4.1. Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

При інтегруванні запропонованих функцій за допомогою формул (12-15) таблиці 4.1 нам заважає доданок, який містить першу степінь незалежної змінної. Зрозуміло, що для того, щоб скористатися основною таблицею інтегралів, нам необхідно виділити повний квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2,$$

де $k^2=c-\frac{b^2}{4a}$. Знак плюс або мінус береться у залежності від того, чи буде другий доданок додатним або від'ємним. Зробимо заміну змінної $t=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$. За формулою (4.7) отримаємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\pm t^2 \pm k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}.$$

Зауважимо, що перед t^2 стоїть знак плюс, якщо $a>0$, і знак мінус, якщо $a<0$. Отримані інтеграли є табличними (формули (12-15) таблиці 4.1). Після інтегрування повертаємося до початкової змінної.

Не для всіх читачів процедура виділення повного квадрату є простою, а запам'ятовувати отриману формулу не варто. При розв'язанні наступних прикладів, ми приведемо простіший прийом виділення повного квадрату. Для користування їм потрібно лише згадати добре відомі формули «квадрат суми» або «квадрат різниці»: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

Приклад 4.7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+15}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть в знаменнику підінтегральної функції. Для цього підпишемо під квадратним тричленом (доданок під доданком) формулу «квадрат різниці» (обираємо формулу за знаком доданку з першим степенем незалежної змінної). Поставимо у відповідність перші два доданки, звідки знайдемо a і b. Додамо та віднімемо в початковому виразі величину, яка дорівнює b^2 (згідно з формулою). Отже, маємо:

$x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 15 = (x-3)^2 + 6$;

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$;

$$\begin{bmatrix} a^2 = x^2 & 2ab = 6x \\ a = x & 2xb = 6x \\ & b = 3 \end{bmatrix}.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+15} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+6} = \begin{bmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+6} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 4.8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть під коренем в знаменнику підінтегральної функції. Для цього потрібно зробити деякі перетворення, а саме:

- переписати доданки в порядку спадання степеня незалежної змінної;
- винести за дужки знак мінус:

- виділити повний квадрат у виразі, який опинився у дужках, за допомогою формули «квадрат суми»;
- змінити знак кожного доданку отриманого виразу на протилежний.

Отже маємо: $3 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x - 3) = 7 - (x + 2)^2$.

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}} = \begin{bmatrix} u = x + 2 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{7-u^2}} =$$

$$= arcsin\frac{u}{\sqrt{7}} + C = arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}} + C.$$

4.4.2. Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ або $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Розглянемо інтеграли більш загального вигляду. Заважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За правилами диференціювання, похідна від многочлену другого порядку – многочлен першого порядку. Тобто за структурою чисельник підінтегрального виразу повторює диференціал знаменника (або підкореневого виразу знаменника), відрізнятися ці вирази можуть лише коефіцієнтами.

Приведемо методику інтегрування таких інтегралів на прикладі інтегралу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Візмемо диференціал знаменника: $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx$. Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо тотожні перетворення чисельника:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Отриманий інтеграл представимо у вигляді двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

перший з яких методом заміни змінної зводиться до інтегралу $\int \frac{du}{u}$ (формула 7 таблиці 4.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Зауважимо, що інтеграли $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ знаходяться аналогічно. Різниця полягає лише у виборі формул інтегрування. Перший з отриманих інтегралів методом заміни змінної зводиться до інтегралу вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (формула 3 таблиці 4.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Приклад 4.9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx$.

Розв'язання: Оцінимо диференціал знаменника

$$d(x^2+10x-3) = (2x+10)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо у ньому тотожні перетворення:

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10-10-8}{x^2+10x-3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx - \frac{18}{2}\int \frac{dx}{x^2+10x-3} = I_1 + I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 + 10x - 3 \\ du = (2x+10)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}lnu + C = \frac{1}{2}ln|x^2 + 10x - 3| + C;$$

$$I_2 = -9\int \frac{dx}{x^2+10x-3} = -9\int \frac{dx}{(x+5)^2-28} = \begin{bmatrix} u = x + 5 \\ du = dx \end{bmatrix} =$$

$$= -9\int \frac{du}{u^2-28} = -9 \cdot \frac{1}{2\cdot 2\sqrt{7}} ln\left|\frac{u-2\sqrt{7}}{u+2\sqrt{7}}\right| + C = -\frac{9}{4\sqrt{7}} ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right| + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}ln|x^2 + 10x - 3| - \frac{9}{4\sqrt{7}} ln\left|\frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}}\right| + C.$$

4.5. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***. Будь-яка елементарна функція $R(x)$ може бути представлена у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - многочлени: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо читачеві процедуру ділення многочленів.

Приклад 4.10. Знайти цілу частину і залишок алгебраїчного дробу $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання: Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 & x^2+x+1 \\
\quad x^4 + \;x^3 \;\; + x^2 & \overline{x^2+2x-1} \\
\hline
\quad -\;\; 2x^3 + x^2 + x & \\
\qquad 2x^3 + 2x^2 + 2x & \\
\hline
\qquad\quad -\; -x^2 - x + 1 & \\
\qquad\qquad -x^2 - x - 1 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -2. &
\end{array}$$

Отже, $N(x) = x^2 + 2x - 1$ - ціла частина, число (-2) – залишок.

Остаточно маємо: $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1} = x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x^2+x+1}$.

Інтегрування многочлену $N(x)$ не складає труднощів, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу.

4.5.1. Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \qquad (4.9)$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n}. \qquad (4.10)$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x-a_1} + B \int \frac{dx}{x-a_2} + \dots + C \int \frac{dx}{x-a_n} =$$

$$= A\, ln|x - a_1| + B\, ln|x - a_2| + \dots + C\, ln|x - a_n|.$$

Приклад 4.11. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

Розв'язання: Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3-5x^2+6x \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 5x^2 + 6x} & 1 \\ 5x^2 - 6x + 1. & \end{array}$$

Отже, початковий інтеграл набуває вигляду

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right) dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

З'ясуємо корені знаменника:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x - 2)(x - 3).$$

Зрозуміло, що корені знаменника дійсні і різні: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Для цього приведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо дорівняти чисельники:

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

Взагалі для знаходження невідомих коефіцієнтів користуються методом невизначених коефіцієнтів, при якому дорівнюються коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових степенях x. До цього метода ми ще звернемося пізніше, а у випадку дійсних і різних коефіцієнтів знаменника набагато швидше знаходяться коефіцієнти при підстановці відомих коренів знаменника. Нехай x послідовно дорівнює $0, 2, 3$. Маємо:

$\underline{x = 0} \mapsto \quad 1 = 6A; \qquad A = \frac{1}{6};$

$\underline{x = 2} \mapsto \quad 20 - 12 + 1 = -2B; \qquad B = -\frac{9}{2};$

$\underline{x = 3} \mapsto \quad 45 - 18 + 1 = 3C; \qquad C = \frac{28}{3}.$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів з відповідними коефіцієнтами. Обчислимо останні:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6}ln|x| - \frac{9}{2}ln|x-2| + \frac{28}{3}ln|x-3| + C.$$

4.5.2. Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}. \qquad (4.11)$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі наступним чином:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \dots + \frac{D}{x-a_1} + \dots + \frac{E}{x-a_n}. \quad (4.12)$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_i кратності α_i відповідає α доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першого. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами 2, 7 таблиці 4.1. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4.12. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2}dx$.

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки: $x^3+5x^2 = x^2(x+5)$. Отже, знаменник має корень $x=0$ кратності 2; і корень $x=-5$ кратності 1.

Розкладемо дріб на простіші: $\frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}$.

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$3x^2 + 30x - 25 = A(x+5) + Bx(x+5) + Cx^2.$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо відомі нам корені до отриманої тотожності. Відомих нам різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Розв’язати цю проблему можна за допомогою наступної «хитрощі»: підставимо у тотожність будь-яке число; отримаємо вираз, який містить всі коефіцієнти; підставимо вже відомі два коефіцієнта; знайдемо звідси невідомий третій:

$\underline{x=0} \Rrightarrow \quad -25 = 5A; \qquad A = -5;$

$\underline{x=-5} \Rrightarrow \quad 75 - 150 - 25 = 5C; \qquad C = -4;$

$\underline{x=1} \Rrightarrow \quad 3 + 30 - 25 = 6A + 6B + C;$

$8 = -30 + 6B - 4; \qquad B = 7.$

Перепишемо початковий інтеграл у вигляді:

$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} dx = -5 \int \frac{dx}{x^2} + 7 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x+5} =$

$= \frac{5}{x} + 7ln|x| - 4ln|x+5| + C.$

4.5.3. Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1 x + q_1) \dots (x^2 + p_s x + q_s). \qquad (4.13)$$

В такому випадку раціональний дріб набуває вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{Dx+E}{x^2+p_sx+q_s}. \qquad (4.14)$$

Обчисленню інтегралів такого вигляду ми приділили достатньо уваги у розділі 4.4. Тому відразу звернемося до прикладів.

Приклад 4.13. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx$.

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. З'ясуємо корені знаменника. Знаменник має один дійсний корень $x = 4$ і два комплексних, які знаходяться з розв'язання рівняння $x^2 = -9$ (розв'язання таких рівнянь виходить за межи курсу, що вивчається). Тому при розкладанні раціонального дробу звернемося до формул (4.10) і (4.14):

$$\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$8x^2 - 22x + 35 = A(x^2+9) + (Bx+C)(x-4).$$

Лише один невідомий коефіцієнт ми можемо знайти за вивченим прийомом:

$\underline{x = 4}$: $\quad 128 - 88 + 35 = 25A; \quad A = 3.$

Настав час познайомитися з методом невизначених коефіцієнтів. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч і праворуч, отримаємо систему з трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язати її можна будь-яким методом, вивченим у розділі 1.3, а можна підставити знайдений коефіцієнт у перше і друге рівняння. Отже маємо

$$8x^2 - 22x + 35 = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx - 4Bx - 4C;$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & \quad 8 = A + B \\ x & -22 = C - 4B \\ x^0 & \ \ 35 = 9A - 4C \end{array} \qquad \begin{array}{l} B = 8 - A = 8 - 3 = 5 \\ C = 4B - 22 = 20 - 22 = -2 \\ \ \end{array}$$

Знайдемо інтеграл

$$\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx = 3\int \frac{dx}{x-4} + \int \frac{5x-2}{x^2+9}dx = 3\int \frac{dx}{x-4} + 5\int \frac{xdx}{x^2+9} -$$

$$-2\int \frac{dx}{x^2+9} = 3\int \frac{dx}{x-4} + \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - 2\int \frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= 3ln|x-4| + \frac{5}{2}ln|x^2+9| - \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} + C.$$

4.6. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, маємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (4.15)$$

Суть методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ якось може бути представлений у вигляді добутку множників u і dv. Далі знаходимо v по відомому виразу dv шляхом інтегрування і потім беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо обидва ці інтеграли легко знаходяться, а заданий інтеграл безпосередньо знайти неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, він охоплює інтегрування великого класу функцій і має практичне застосування при розв'язанні прикладних задач.

Допоможемо читачеві зорієнтуватися у великому просторі запропонованих функцій за допомогою наступної підказки. Приведемо найпоширеніші ситуації, коли потрібно звертатися до метода інтегрування частинами. Але потрібно пам'ятати, що наведений перелік функцій ні в якому разі не охоплює всіх можливих підінтегральних виразів, а пропонує лише типові.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

- $\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \quad \left(u = P_n(x)\right);$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

- $\int P_n(x) a^x dx, \qquad \left(u = P_n(x)\right);$
- $\int \log_a(ax+b)\, dx, \qquad (u = \log_a(ax+b));$
- $\int P_n(x) \log_a(ax+b) dx; \quad (u = \log_a(ax+b));$
- $\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \qquad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right);$

- $\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx;$ $\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$

- і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 4.14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x-3)e^{5x}dx.$$

Розв'язання: За формулою (4.15) маємо

$$\int (8x-3)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 8x-3 & dv = e^{5x}dx \\ du = 8dx & v = \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}(8x-3)e^{5x} - \frac{8}{25}e^{5x} + C =$$

$$= \frac{1}{25}(40x-15-8)e^{5x} + C = \frac{1}{25}(40x-23)e^{5x} + C.$$

Приклад 4.15. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 cos4xdx.$$

Розв'язання: Скористаємося формулою (4.15) і згадаємо зауваження. Маємо многочлен другого ступеня, отже інтегрувати частинами потрібно двічі:

$$\int x^2 cos4xdx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = cos4xdx \\ du = 2xdx & v = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\int xsin4xdx = \begin{bmatrix} u = x & dv = sin4xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{4}cos4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xcos4x + \frac{1}{4}\int cos4xdx\right) =$$

$= \frac{1}{4}x^2 sin4x + \frac{1}{8}xcos4x - \frac{1}{32}sin4x + C.$

Приклад 4.16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int arctg(x-1)dx.$$

Розв'язання: За формулою (4.15) маємо

$$\int arctg(x-1)dx = \begin{bmatrix} u = arctg(x-1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{dx}{x^2-2x+2} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\, arctg(x-1) - \int \frac{xdx}{x^2-2x+2} = x\, arctg(x-1) - I.$$

Отримали інтеграл того типу, який докладно розглянули у п.4.4.2. Виконаємо потрібні перетворення:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) + arctg(x-1) + C.$$

Остаточно маємо: $\int arctg(x-1)dx =$

$$= x\, arctg(x-1) - \frac{1}{2}ln(x^2-2x+2) - arctg(x-1) + C.$$

Приклад 4.17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int xln(2x+3)dx.$$

Розв'язання: За формулою (4.15) маємо

$$\int xln(2x+3)dx = \begin{bmatrix} u = ln(2x+3) & dv = xdx \\ du = \frac{2dx}{2x+3} & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln(2x+3) - \int \frac{x^2dx}{2x+3} = \frac{x^2}{2}ln(2x+3) - I.$$

Отримали інтеграл I від неправильного раціонального дробу. Необхідно виділити цілу частину. Виконаємо операцію ділення многочленів:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^2 \\ x^2+\frac{3}{2}x \end{array} & \begin{array}{l} 2x+3 \\ \hline \frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{l} -\frac{3}{2}x \\ -\frac{3}{2}x-\frac{9}{4} \end{array} & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \frac{9}{4} &
\end{array}$$

Підставимо в інтеграл: $I=\int\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{2x+3}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{3}{4}\int dx+\frac{9}{4}\int\frac{dx}{2x+3}=\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}ln(2x+3)+C.$$

4.7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

До поняття визначеного інтегралу приводить велика кількість прикладних задач математики, фізики, та інших наук, а саме – обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції і т.п.

Визначення 4.4. ***Визначеним інтегралом*** називається границя до якої прямує n-та інтегральна сума при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтегралу. Позначається визначений інтеграл як

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{max\Delta x_i\to 0, n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty} S_n=S. \tag{4.16}$$

Тут функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцію***; вираз $f(x)dx$ - ***підінтегральним виразом***, а a і b - ***границями інтегрування***.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю Ox.

4.8. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Насамперед зауважимо, що визначений інтеграл від функції є число, яке відповідає даній функції згідно визначенню (4.16), тому це число не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \qquad (4.17)$$

<u>Теорема</u> (про інтеграл суми). Визначений інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(u(x) + v(x) + \cdots + w(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx. \qquad (4.18)$$

<u>Теорема</u> (про винесення постійного множника). Постійний множник можна виносити за знак інтегралу

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad (4.19)$$

де C -константа.

Теорема ***(про перестановку границь).*** Якщо верхню та нижню границі визначеного інтегралу переставити місцями, то знак інтегралу зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (4.20)$$

Теорема ***(про адитивність інтегралу).*** Нехай $a < c < b$. Якщо існує визначений інтеграл на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, то існує інтеграл і на відрізку $[a, b]$, при цьому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (4.21)$$

4.9. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦЯ

Теорема. Значення визначеного інтегралу дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої при $x = a$ і $x = b$, тобто границях інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4.22)$$

Формула (4.22) називається ***формулою Ньютона-Лейбниця***.

Приклад 4.18. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx$.

Розв'язання: Скористаємося формулою Ньютона-Лейбниця і основними властивостями визначеного інтегралу

$$\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx = \frac{5}{2}\int_1^3 x^2dx - \frac{3}{2}\int_1^3 dx - \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - \frac{3x}{2}\Big|_1^3 - \frac{7}{2}ln[x]\Big|_1^3 - \frac{13}{2x}\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{5}{6} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} ln3 + \frac{7}{2} ln1 - \frac{13}{6} + \frac{13}{2} = 23 - \frac{7}{2} ln3.$$

Приклад 4.19. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання: Для обчислення визначеного інтегралу, згадаємо правило знаходження первісної від раціонального дробу

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \left[\begin{array}{l} \qquad \frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ \quad 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ \begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B, \quad B = -A = -1 \\ x^1 & 0 = C \\ x^0 & 1 = A \end{array} \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= ln|x| \Big|_1^2 - \frac{1}{2} ln|x^2+1| \Big|_1^2 = ln2 - ln1 - \frac{1}{2} ln5 + \frac{1}{2} ln2 =$$

$$= \frac{3}{2} ln2 - \frac{1}{2} ln5 = \frac{1}{2}(ln2^3 - ln5) = \frac{1}{2} ln\frac{8}{5}.$$

4.10. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Як і при знаходженні первісної при невизначеному інтегруванні, одним з найпоширеніших методів є метод заміни змінної. Але заміна змінної в визначеному інтегралі потребує більшої уваги. Нагадаємо, що за формулою (4.7) у невизначеному інтегралі має місце тотожність

$$\int f(\varphi(u))\, \varphi'(u)du = \int f(x)dx|_{x=\varphi(u)}.$$

Сформулюємо правило заміни зміни у визначеному інтегралі за допомогою наступної теореми.

Теорема. Якщо в інтервалі $[\alpha, \beta]$ функції $x = \varphi(u)$, $\varphi'(u)du$ і $f\big(\varphi(u)\big)$ неперервні і $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)du. \qquad (4.23)$$

Зауваження 1. Перетворення підінтегрального виразу при заміні змінної у визначеному інтегралі відбувається саме так, як і у невизначеному. Нові ж границі інтегрування α і β є коренями рівнянь:

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

Зауваження 2. При замінні змінної у визначеному інтегралі повертатися до попередньої змінної не потрібно. Первісні обчислюються при нових границях інтегрування.

Приклад 4.20. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx$.

Розв'язання: $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x - 1 \\ du = e^x dx \\ u_{\text{н}} = e^0 - 1 = 0 \\ u_{\text{в}} = e^1 - 1 \end{bmatrix} =$

$= \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6}\Big|_0^{e-1} = \frac{1}{6}(e-1)^6.$

4.11. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Теорема. Нехай u і v - диференційовані функції незалежної змінної x на відрізку $[a, b]$, тоді

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du. \qquad (4.24)$$

Формула (4.24) має назву ***формули інтегрування частинами визначених інтегралів.***

Зауваження: У формулі (4.24) букви u і v означають представлення підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u(x) \cdot dv(x)$. Не треба плутати це представлення з заміною змінної, тому нових змінних і границь інтегрування при інтегруванні частинами не виникає.

Приклад 4.21. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x}$.

Розв'язання: За формулою (4.24) маємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2x} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{sin^2x} & v = -ctgx \end{bmatrix} = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + ln|sinx| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{\pi}{3} ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} ctg\frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{3}}{2} - ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 4.22. Обчислити інтеграл $\int_1^e ln^3x\, dx$.

Розв'язання: Скористаємося формулою (4.24). Зауважимо, що інтегрувати частинами необхідно буде тричі:

$$\int_1^e ln^3x\, dx = \begin{bmatrix} u = ln^3x & du = 3ln^2x\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x \cdot ln^3x \Big|_1^e -$$

$$-3\int_1^e x \cdot ln^2x \cdot \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u = ln^2x & du = 2lnx\frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= e \cdot ln^3e - 1 \cdot ln^31 - 3\left(x \cdot ln^2x \Big|_1^e - 2\int_1^e x \cdot lnx \cdot \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = lnx & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = e - 3e \cdot ln^2e + 3 \cdot ln^21 +$$

$+6\left(x \cdot lnx \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x}\right) = e - 3e + 6e \cdot lne - 6 \cdot ln1 -$

$-6x \Big|_1^e = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.$

4.12. ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Обчислення площі плоскої фігури

За геометричним тлумаченням визначного інтегралу, площа криволінійної трапеції (рис. 4.1,а), яка обмежена кривою $y = f(x)$, лініями $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.25}$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 4.1,б), то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих $x = a$ і $x = b$. Ці точки є границями інтегрування.

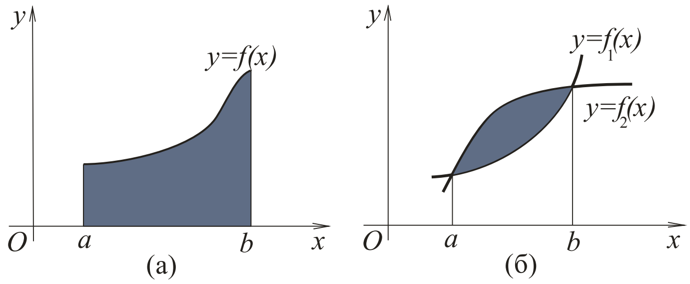


Рис. 4.1.

Шукана площа плоскої фігури може бути знайдена як різниця між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x), y = 0, x = a, x = b$ і $y = f_2(x), y = 0, x = a, x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (4.26)$$

Приклад 4.23. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = 2 - x$.

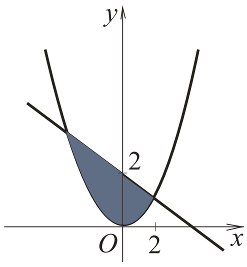


Рис. 4.2.

Розв'язання: Побудуємо фігуру (рис. 4.2). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}; \qquad \begin{array}{l} x^2 = 2 - x; \\ x^2 + x - 2 = 0; \\ x_1 = -2; \quad x_2 = 1. \end{array}$$

Отже, точки перетину $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Обчислимо площу за формулою (4.26):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} + 2 + 4 - \frac{8}{3} = 4\frac{1}{2} \text{ (од}^2\text{)}.$$

4.13. Застосування визначених інтегралів для розв'язанні задач економіки

Познайомимося з основними поняттями, необхідними нам для розв'язання задач економіки.

Нехай функція $z = f(x)$ описує ***продуктивність*** деякого виробництва за певний час. ***Об'єм продукції*** $Q(t_1, t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (4.27)$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій ***Кобба-Дугласа***. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t), \qquad (4.28)$$

де $A(t),\ L(t),\ K(t)$ - величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), $a_0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ - деякі коефіцієнти.

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка характеризує нерівномірність розпо-ділу доходів серед населення, де y - частинка сукупного доходу, яку отримує частинка x найбіднішого населення. Графік цієї функції називається ***кривою Лоренца*** (рис. 4.3).

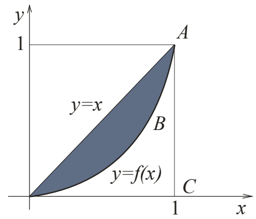


Рис. 4.3.

Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0; 1]$, а з цього прямує,що нерівномірність розподілу доходів тим більша, чим більша площа фігури OAB. Тому для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують ***коефіцієнт Джині*** k, який дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC:

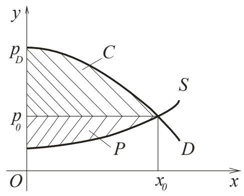


Рис. 4.4.

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}. \qquad (4.29)$$

Нехай крива $p = f(x)$ - крива попиту D на деякий товар і $p = g(x)$ - крива пропозиції S, де p ціна на товар, а x - величина попиту (пропозиції). Точка перетину цих ліній (x_0, p_0) має назву ***точка ринкової рівноваги*** (рис. 4.4). Прибуток від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку $x_0 p_0$. Якщо ціна буде неперервно знижуватися від максимальної $p_D = f(0)$ до рівноважної p_0 (якщо задовольняється попит), то прибуток складає величину $\int_0^{x_0} f(x)dx$.

Величина коштів

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0, \qquad (4.30)$$

яка зберігається користувачем, якщо товар продається за рівноважною ціною p_0, називається ***виграшем користувачів***.

Аналогічно, величина

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx, \qquad (4.31)$$

називається ***виграшем постачальників***.

Приклад 4.24. Нехай зміна щоденної продуктивності праці деякого виробництва задана функцією $f(t) = -0{,}0054t^2 + 0{,}028t + 12{,}34$, де t - час у годинах. Знайти об’єм випуску продукції, яка вироблена за 8-годинний робочий день.

Розв’язання: За формулою (4.27) знайдемо об’єм $Q(t_1, t_2)$ продукції, виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0{,}0054t^2 + 0{,}028t + 12{,}34)dt =$$

$= (-0{,}0018t^3 + 0{,}014t^2 + 12{,}34t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$

Обчислимо об'єм продукції, вироблений за 8-годинний робочий день:

$Q(0{,}8) = -0{,}0018 \cdot 8^3 + 0{,}014 \cdot 8^2 + 12{,}34 \cdot 8 =$

$= -0{,}9216 + 0{,}896 + 98{,}72 = 98{,}6944$ (од.).

Приклад 4.25. Знайти об'єм виробленої деяким підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5t},\ L(t) = (t+2)^3,\ K(t) = (2t-5)^2, a_0 = 3,$ $\alpha = 2,\ \beta = \frac{1}{3},\ \gamma = \frac{1}{2}.$

Розв'язання: За формулами (4.27), (4.28) маємо

$$Q(0;10) = 3\int_0^{10} e^t(t+2)(2t-5)dt =$$

$$= 3\int_0^{10} e^t(2t^2 - t - 10)dt = \begin{bmatrix} u = 2t^2 - t - 10 \\ dv = e^t dt \\ du = (4t-1)dt \\ v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= 3e^t(2t^2 - t - 10)\Big|_0^{10} - 3\int_0^{10} e^t(4t-1)dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 4t - 1 \\ dv = e^t dt \\ du = 4dt \\ v = e^t \end{bmatrix} = 3e^{10}(200 - 10 - 10) - 3(-10) -$$

$$-3e^t(4t-1)\Big|_0^{10} + 3 \cdot 4\int_0^{10} e^t dt = 540e^{10} + 30 -$$

$$-117e^{10} - 3 + 12e^{10} - 12 = 435e^{10} + 15 \approx 9581527{,}621.$$

Приклад 4.26. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренці може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{7-3x}$, де $x \in [0;1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

Розв'язання: Обчислимо площі фігур, які входять до формули (4.29). Отже площа трикутника дорівнює

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$ (од^2).

а площу фігури OAB знайдемо за формулою (4.26):

$$S_{OAB} = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{7-3x}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{3}\frac{(7-3x)-7}{7-3x}\right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{2}{3} - \frac{14}{3}\frac{1}{7-3x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{14}{9}ln|7-3x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{14}{9}ln4 - \frac{14}{9}ln7 =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{14}{9}ln\frac{4}{7} \approx 0{,}2962 \text{ (од}^2\text{)}.$$

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює $k = \frac{0{,}2962}{0{,}5} = 0{,}5924$.

Приклад 4.27. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$p = 210 - x^2, \qquad p = 12x + 50.$

Розв'язання: Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} p = 210 - x^2 \\ p = 12x + 50 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &210 - x^2 = 12x + 50; \\ &x^2 + 12x - 160 = 0; \\ &\left[\begin{aligned} &x_1 = 8 \\ &x_2 = -20 \ \text{(не має сенсу)} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x_0 = 8; \quad p_0 = 210 - 8^2 = 210 - 64 = 136.$

Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 8$, $p_0 = 136$.

Знайдемо виграш користувачів (4.30):

$$C = \int_0^8 (210 - x^2)dx - 8 \cdot 136 = \left(210x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^8 - 1088 =$$

$= 1680 - 170{,}67 - 1088 = 421{,}33$ (грош. од.).

Знайдемо виграш постачальників (4.31):

$$P = 8 \cdot 136 - \int_0^8 (12x + 50)dx = 1088 - (6x^2 + 50x)\Big|_0^8 =$$

$= 1088 - 384 - 400 = 304$ (грош. од.).

ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ
Модульна контрольна робота №1

Варіант 1

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -29 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.1

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,2	0,45	200
	Галузь2	0,4	0,25	100

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 25 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-7}\frac{x^2-49}{x^2+2x-35}$;   б) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-49x+3}{7x^2+x+15}$;

в) $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-4}-2}$;   г) $\lim_{x\to0}\frac{sin7x-sin5x}{arcsinx}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(8x^2-15x^7)\cdot arctg^4 6x$;   б) $y=\frac{5arccos4x^9}{x^3+2x^7}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+9t+2130$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t=0)$; б) в першому півріччі $(t=6)$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{2x}{1+x^2}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=8x^3-3x^4$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=18$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=13+8x+x^2$.

Варіант 2

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+4\,x_3=5\\7x_1+3x_2-x_3=26\\x_1-x_2+4x_3=-3\end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.2 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.2

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,35	300
	Галузь2	0,4	0,15	200

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-x-5}{x^2-6x+5}$; б) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^4+6x^3+5}{2x^2-11x-1}$;

в) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{x^2+x-20}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-cos^2 3x}{4x^2}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(7x^9-11x^3)\cdot arcsin^4 9x$; б) $y=\frac{11cos8x^7}{x^8-3x^4}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{5}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+11t+3420$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t=0)$; б) в другому кварталі $(t=6)$.

6. Дослідити функцію $y=x+\frac{1}{x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+3x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=112$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=9+4x+x^3$.

Варіант 3

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4\,x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.3 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.3

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	400
	Галузь2	0,25	0,5	200

Знайти:
1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2+9x+14}$;
б) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x-7}{9x^3+8x^2+14}$;
в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+5x}$;
г) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin4x}{x^2-8x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(2x^{14}-5x^4)\cdot arccos^2 4x$;
б) $y=\frac{8tg13x^2}{x^3+3x^5}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{7}{2}t^2-4t+1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в першому півріччі $(t=6)$; б) наприкінці року $(t=12)$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{3x^2-6}{3-2x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $x^4 - 24x^2 + 12x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 45$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 28 + 21x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Варіант 4

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - \ x_3 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.4

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,4	300
	Галузь2	0,25	0,2	100

Знайти:

1) плановані об’єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-4} \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$;
б) $\lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2+8x+1}{4x^2-10x+3}$;
в) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{\sqrt{4x+9}-1}$;
г) $\lim_{x\to0} \frac{arctg3x}{sin2x-sin4x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot ctg^{11}3x$; б) $y = \frac{9sin7x^3}{x^6 - 2x^4}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{8}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 14t + 4410$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t = 0)$; б) в другому кварталі $(t = 6)$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{\ln x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 15$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 25 + 3x + x^2$.

Варіант 5

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -4 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -26 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.5 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.5

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,5	0,15	400
	Галузь2	0,1	0,35	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 25 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -5}\frac{125+x^3}{x^2-6x+5}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2-9}{4-2x+7x^3}$;

в) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{\sqrt{3x+10}-1}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{sin4x+sin5x}{6x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(3x^9-9x^7)\cdot tg^3 8x$; б) $y=\frac{8ctg3x^5}{x^7-14x^5}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{11}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-9t+6510$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в першому півріччі $(t=6)$; б) наприкінці року $(t=12)$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=x^4-96x^2+315$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=84$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=7+9x+x^3$.

Варіант 6

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+4x_2+8x_3=-10 \\ 2x_1-7x_2-4x_3=35 \\ x_1-5x_2+9x_3=-3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.6 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.6

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	600
	Галузь2	0,25	0,1	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2+3x-4}$;

б) $\lim_{x\to \infty}\frac{11x^2+6x+20}{4x^3+7x^2+25x}$;

в) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+15}-2}{\sqrt{x+8}-3}$;

г) $\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{sin5x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(4x^6+9x^5)\cdot cos^{10}4x$;

б) $y=\frac{9^{arccosx^5}}{x^4-4x^5}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{5}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-4t+2340$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t=0$); б) наприкінці року ($t=12$).

6. Дослідити функцію $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{5}{6}x^3+2x^2-2$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x)=10+\frac{6}{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x)=2+3x+\frac{x^2}{2}$.

Варіант 7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.7

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,45	200
	Галузь2	0,1	0,55	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 30 %, а другої – на 5 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-8x+12}{x^2-36}$;
б) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-9x^2+5}{5x^2+9x-12}$;
в) $\lim_{x\to -6} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3}}{x^2+4x-12}$;
г) $\lim_{x\to 0} \frac{cos^2 5x - cos^2 x}{x\cdot tg4x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y = (5x^6 - 9x^3)\cdot sin^7 6x$;
б) $y = \frac{3\cdot e^{sin^5 3x}}{x^{14}-14x^8}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t + 1250$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в другому кварталі ($t = 6$); б) в третьому кварталі ($t = 9$).

6. Дослідити функцію $y = \frac{e^{5-x}}{5-x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 11{,}5$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 5 + \frac{5x}{2} + \frac{x^2}{2}$.

Варіант 8

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

2. В таблиці 1.8 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.8

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	600
	Галузь2	0,45	0,1	100

Знайти:

1) плановані об’єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-3x+2}$;

б) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^5+2x^2-9x}{3x^4-5x^2+16}$;

в) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos5x}{sin^2 4x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot arcctg^5 3x$; б) $y = \frac{4cos8x^{10}}{x^3-4x}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 7t + 3550$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в третьому кварталі ($t = 9$).

6. Дослідити функцію $y = \ln(1 - x^2)$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 20$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 6x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Варіант 9

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 29 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 28 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.9 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.9

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,4	0,15	200
	Галузь2	0,1	0,35	100

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-11x+18}{x^2+3x-10}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x-11}{2x^5+x^4+9x}$;

в) $\lim_{x\to -7}\frac{\sqrt{x+11}-2}{x^2+6x-7}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg5x}{1-cos^2 3x}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(7x^8-19x^4)\cdot 2^{tgx^5}$; б) $y=\frac{6arctg4x^7}{x^7-4x^5}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{7}{2}t^2-8t+1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року $(t=0)$; б) в третьому кварталі $(t=9)$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=4x^4-8x^2+5x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=70$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=9+16x+2x^3$.

Варіант 10

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1+x_2+4x_3=-6 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=17 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-33 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

2. В таблиці 1.10 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.10

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,45	500
	Галузь2	0,2	0,35	300

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 15 %.

3. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-5x-14}{x^2-4}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+9x}{4x^3+6x^2-15}$;

в) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{x+1}-2}$; г) $\lim_{x\to0}\frac{cos4x-cos6x}{x\cdot arcsinx}$.

4. Знайти похідні:

а) $y=(13x^6-8x)\cdot e^{arccosx^5}$; б) $y=\frac{4ctg8x^{21}}{x^8-5x^3}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t)=\frac{5}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+14t+2720$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t=0$); б) в другому кварталі ($t=6$).

6. Дослідити функцію $y=\ln(9-x^2)$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{7}x^7$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=31$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x)=68+7x+2x^3$.

Модульна контрольна робота № 2

Варіант 1

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+10x-13}$;

в) $\int \frac{5x^2-2x+57}{(x+1)(x^2-8x+7)}dx$; г) $\int (4x-8)\sin 3x\, dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 2$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 33{,}52e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (4t-3)^4$, $K(t) = (t+2)^5$, $a_0 = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

Варіант 2

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x-7)}}{3x-7}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x-x^2}}$;

в) $\int \frac{9x^2+30x-138}{(x-2)(x^2+x-20)}dx$; г) $\int (5x+4)e^{8x}dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x}dx$; б) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = 0$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші дев'ять годин праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0038t^2 - 0{,}052t + 41{,}12$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}125t}$, $L(t) = (6t-1)^3$, $K(t) = (t-2)^2$, $a_0 = 9$, $\alpha = 9$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Варіант 3

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{x-8}}dx}{\sqrt{x-8}}$; б) $\int \frac{dx}{3x^2-6x-7}$;

в) $\int \frac{2x^2+58x-63}{x^3-7x^2}dx$; г) $\int \ln(x+11)\,dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x\,dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $3y = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = 2$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші вісім години праці при продуктивності $f(t) = 25{,}81e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{3}}$, $L(t) = (4t-1)^2$, $K(t) = (t+5)^5$, $a_0 = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

Варіант 4

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(x+7)}}{x+7}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+1}}$;

в) $\int \frac{5x^2+12x-62}{(x-1)(x^2+2x-8)}dx$; г) $\int arccos3x\,dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x^2)\,dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і прямою $y = 0$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0064t^2 + 0{,}013t + 54{,}11$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 9 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (5t-1)^2$, $K(t) = (4t-3)^3$, $a_0 = 8$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Варіант 5

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\arccos^7 8x}{\sqrt{1-64x^2}} dx$; б) $\int \frac{dx}{4x^2-2x-3}$;

в) $\int \frac{x^2-29x-180}{(x+5)(x^2-25)} dx$; г) $\int x\, arctg 5x\, dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 + 2x - x^2$ і прямою $y = x + 1$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші дев'ять години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0071t^2 + 0{,}035t + 12{,}64$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}125t}$, $L(t) = (t+1)^4$, $K(t) = (3t+7)^5$, $a_0 = 2$, $\alpha = 8$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

Варіант 6

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{e^{arctg 2x} dx}{1+4x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+9}}$;

в) $\int \frac{9x^2+10x-57}{(x-1)(x^2+8x+15)} dx$; г) $\int x \sin(4x+9)\, dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4+5x)^3}}$; б) $\int_0^2 x \quad e^{-\frac{x}{2}} dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t) = 19{,}83e^{-0{,}125t}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 15 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}1t}$, $L(t) = (t-1)^5$, $K(t) = (3t+4)^2$, $a_0 = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Варіант 7

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(5x-3)}dx}{5x-3}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$;

в) $\int \frac{18x+48}{(x+2)(x^2+3x-10)}dx$; г) $\int x\, e^{4x+7}dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; б) $\int_{-2}^2 (x-1)\sin \pi x\, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{1-x}$, $y = x+1$ і $y = 0$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0033t^3 + 0{,}76t + 62{,}76$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{6}}$, $L(t) = (5t-1)^5$, $K(t) = (t+2)^3$, $a_0 = 2,\ \alpha = 6,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{3}$.

Варіант 8

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}}$;

в) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+10x+25)}dx$; г) $\int \arcsin 2x\ dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; б) $\int_0^2 x^2 e^{-2x}dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 0$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 19{,}63e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}2t}$, $L(t) = (t+6)^5$, $K(t) = (3t+1)^2$, $a_0 = 11,\ \alpha = 5,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{2}$.

Варіант 9

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[4]{ctg^3 5x}}{sin^2 5x} dx$; б) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$;

в) $\int \frac{5x^2-64x+83}{(x-7)(x^2+2x-3)} dx$; г) $\int (4x-9)e^{5x} dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin 3x \, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші сім годин праці при продуктивності $f(t) = 73{,}15e^{-\frac{t}{7}}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}5t}$, $L(t) = (5t+1)^3$, $K(t) = (t-8)^2$, $a_0 = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Варіант 10

1. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$;

в) $\int \frac{x^2+11x+48}{(x+2)(x^2-2x-8)} dx$; г) $\int (9x+3) \cos 4x \, dx$.

2. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x \, dx$.

3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

4. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 32{,}47e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах.

5. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0{,}25t}$, $L(t) = (t-1)^4$, $K(t) = (3t-2)^3$, $a_0 = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М.: Физматгиз, 1963. – 748 с.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М. Высшая школа, 1966. – 460 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1985. – 320 с.
5. Пискунов Н.С. Диференциальное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
7. Боревич З.И. Определители и матрицы. - М.: Наука, 1988. – 184 с.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
10. Ганич Д.І., Олійник И.С. Російсько-український, українсько-російський словник. – К.: А.С.К., 1996. – 550 с.
11. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
12. Высшая математика для экономистов. / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
13. Коваленко Л.Б. Вища математика для менеджерів. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 291 с.
14. Коваленко Л.Б., Станішевський С.О. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 424 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки та контрольні роботи
з вищої математики (для студентів 1 курсу заочної форми
навчання за напрямами підготовки 6.030601 – „Менеджмент”,
6.140101 – “ Готельно-ресторанна справа”,
6.020107 – „Туризм”)

Укладачі: **Коваленко** Людмила Борисівна
Мордовцев Сергій Михайлович
Пахомова Євгенія Серафимівна

Відповідальний за випуск *А.І. Колосов*

Редактор *З.І. Зайцева*

Комп’ютерне верстання *Л.Б. Коваленко*

План 2011, поз. 154 М

Підп. до друку 26. 04.2011 Формат 60x84 /16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 5,0
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001